$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R})\ AA^t = I\}$

$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C})\ A\bar{A}^t = I\}$

$Sp(n) = \{A \in M_n(\mathbb{H}),\ A\bar{A}^t = I\}$

$SO(n) = \{A \in O(n),\ \det A = 1\}$

$SU(n) = \{A \in U(n),\ \det A = 1\}$

$Sp(1) \cong S^3$

$GL_n(\mathbb{K}) \subseteq M_n(\mathbb{K}) = \delta.\chi.\ \mathbb{K}^{n^2}$

καμπύλες

$a : (-c, c) \to G \leq GL_n(\mathbb{K})$ τοπολογική ομάδα

$t \mapsto a(t)$ πίνακας της G

$0 \mapsto a(0) = I$

Απειροστικός Λογισμός

$y = f(x) : (c,d) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση

1) Η παράγωγος είναι όριο

Υπάρχει η παράγωγος στο x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad \Delta x = (x_0 + \Delta y) - x_0$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : 0 < |\Delta x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

$$|\Delta y - f'(x_0)\Delta x| < \varepsilon |\Delta x|$$

2) Η παράγωγος είναι γραμμική προσέγγιση.

Η ποσότητα $|\Delta y - f'(x_0)\Delta x|$ είναι πολύ μικρή ως προς τη $|\Delta x|$.

• Για μικρό Δx, το $f'(x_0)\Delta x$ προσεγγίζει το Δy.

Δηλαδή $\Delta y \simeq f'(x_0)\Delta x$

$$f'(x_0) \simeq \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Η παράγωγος είναι πηλίκο διαίρεσης

• Το διαφορικό της y, dy είναι $dy = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)\,dx$

• Το διαφορικό της x, $dy = f'(x)\,dx = f'(x)\,\Delta x$

$x \in$ Πεδίο Ορισμού της y.

Δx: μικρή ποσότητα.

Το dy εξαρτάται από το $(x, \Delta x)$

Για $x = x_0$.

Το dy είναι μια γραμμική απεικόνιση ως προς dx ή Δx

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$y = f(x) = 4x^2 - 3x + 1$

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \ldots = (8x-3)\Delta x + 4(\Delta x)^2.$

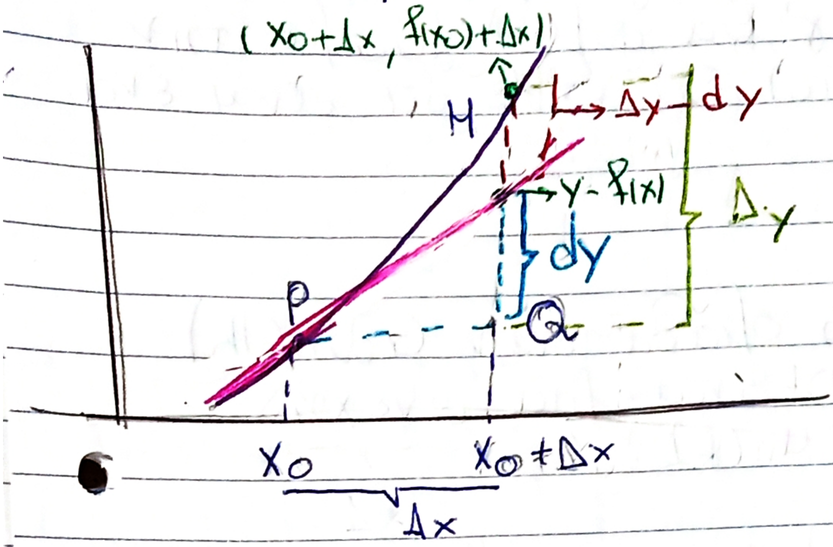
$dy = f'(x)\Delta x = (8x-3)\Delta x$

$\Delta y - dy = 4(\Delta x)^2$

για τις τιμές: $(x, \Delta x)$, $(2,\ 0.1)$ $(2,\ 0.001)$

• $(2, 0.1)$: $\Delta y = 1.34$, $dy = 1.3$, $\Delta y - dx = 0{,}04$

• $(2, 0.001)$: $\Delta y = 0.013004$, $dy = 0.013$ $\Delta y - dx = 0.000004$



$\tan\varphi = \dfrac{dy}{\Delta x} = f'(x_0)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $\gamma : (-c, c) \to \mathbb{R}^n$ μια καμπύλη $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ $\gamma_i : (-c, c) \to \mathbb{R}$

Η γ είναι διαφορίσιμη στο t_0, αν υπάρχει συνεχής γραμμική απεικόνιση $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ και μια απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ η οποία ορίζεται για μικρά h ώστε

$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = \bar{0}$ και $\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + \lambda(h) + \|h\| \varphi(h)$

Τότε, η παράγωγος γ' είναι μια απεικόνιση:

$\gamma' : (-c, c) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ όπου $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ είναι το σύνολο των συνεχών γραμμικών απεικονίσεων.

Ορισμος

Έστω V ένας Ευκλείδιος χώρος, $\gamma:(a,b)\to V$ είναι μια συνεχής καμπύλη. Με γ' θα συμβολίζουμε την παράγωγο της γ και το $\gamma'(0)$ θα λέμε ότι είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα.

Προταση

Έστω G μια τοπολογική ομάδα στην $Gl_n(\mathbb{K})$. Μια καμπύλη γ στην G είναι μια συνεχής απεικόνιση $\gamma:(-c,c)\to G\subseteq M_n(\mathbb{K})$.

Αν γ, γ' είναι δύο καμπύλες, τότε ορίζεται το γινόμενο $(\gamma\gamma')(t)=\gamma(t)\gamma'(t)$

Διότι $\gamma(t), \gamma'(t)\in G$ και είναι πίνακες.

Προταση

Έστω ότι οι καμπύλες γ και $\sigma:(-c,c)\to V$ είναι διαφορίσιμες στο t_0, τότε και η $\gamma\sigma$ είναι επίσης διαφορίσιμη στο t_0 και ισχύει $(\gamma\sigma)'(t_0)=\gamma'(t_0)\sigma(t_0)+\gamma(t_0)\sigma'(t_0)$

$\gamma(t)$ και $\sigma(t)$ είναι πίνακες $\forall t\in(-c,c)$.

Άρα $\gamma(t)=(a_{ij}(t))$ και $\sigma(t)=(b_{ij}(t))$

$V\leq Gl_n(\mathbb{K})$
$\subseteq M_n(\mathbb{K})=\mathbb{K}^{n^2}$

(*) $\gamma_{i,j}:(-c,c)\to\mathbb{R}$ συνεχής
$\gamma_{i,j}(t)=a_{i,j}(t)$ διαφορίσιμη

Έχω ένα πίνακα και κάθε t μου δίνει τα $\gamma(t)=(\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))$

$(\gamma\sigma)(t)=\gamma(t)\sigma(t)=(a_{i,j}(t))(b_{i,j}(t))=$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\,b_{kj}(t)\right)$$

$(\gamma\sigma)'(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, b_{kj}(t)\right)' = \left(\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}(t)\, b_{kj}(t))'\right) =$

$\sum_{k=1}^{n} (a'_{ik}(t)\, b_{kj}(t) + a_{ik}(t)\, b'_{kj}(t))$

Επομένως, $\sum_{k=1}^{n} a'_{ik}(t)\, b_{kj}(t) + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, b'_{kj}(t)$

$\quad\quad\quad\quad \| \quad\quad\quad\quad\quad\quad \|$

$\quad\quad\quad \gamma'(t)\sigma(t) \quad + \quad \gamma(t)\sigma'(t)$

- Έχουμε $G \leq GL_n(\mathbb{K})$

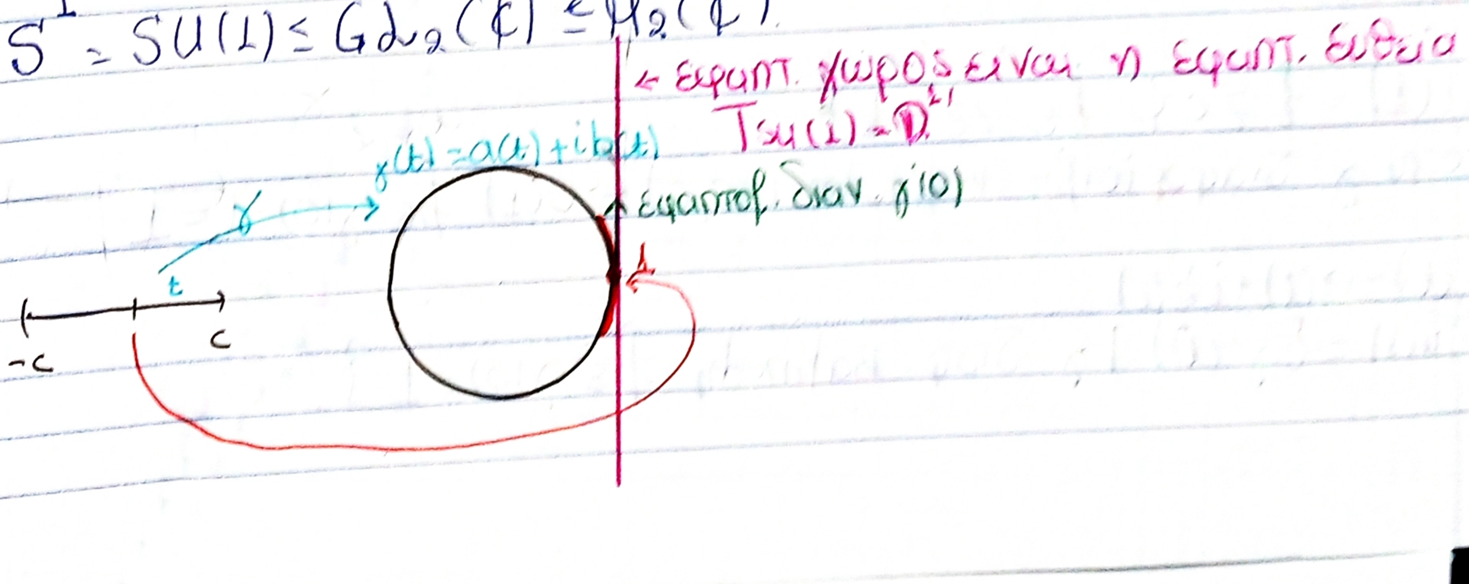
Θεωρούμε όλες τις διαφορίσιμες καμπύλες $\gamma : (-c, c) \to G$ ώστε $\gamma(0) = I$.
Για κάθε τέτοια θεωρούμε την παράγωγό της στο 0: $\gamma'(0)$ το οποίο είναι ένας πίνακας στον $M_n(\mathbb{K})$ και καλείται εφαπτόμενο διάνυσμα στο 0 πάνω στην G, στο γ.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω G ομάδα στον $M_n(\mathbb{K})$. Με T_G θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων $\gamma'(0)$, ($\gamma : (-c, c) \to G$, $\gamma(0) = I$) στο 0 της G.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$S^1 = SU(1) \leq GL_2(\mathbb{C}) \leq M_2(\mathbb{C})$



Πρόταση

Η T_G είναι υπόχωρος του $M_n(\mathbb{K})$

Απόδειξη

Παίρνουμε δύο τυχαία $\gamma'(0), \sigma'(0)$ και δείξε ότι το $\gamma'(0)+\sigma'(0) \in T_G \Leftrightarrow \exists$ καμπύλη $\varphi:(-c,c)\to G$ με $\varphi(0)=I$ ώστε $\varphi'(0)=\gamma'(0)+\sigma'(0)$

Έστω $\varphi(t)=\gamma(t)\sigma(t)$

$$\varphi'(t)=\gamma'(t)\sigma(t)+\gamma(t)\sigma'(t)$$

$$\varphi'(0)=\gamma'(0)\underset{I}{\underset{\shortparallel}{\sigma(0)}}+\underset{I}{\underset{\shortparallel}{\gamma(0)}}\sigma'(0) \quad =\gamma'(0)+\sigma'(0).$$

Επίσης, πρέπει $r\gamma'(0)\in T_G$

Έστω $\varphi(t)=\gamma(r\cdot t) \Rightarrow \varphi(0)=\gamma(r\cdot 0)=\gamma(0)=I$.

$\varphi'(t)=\gamma'(rt)=r\gamma'(t)$.

$\varphi'(0)=r\gamma'(0)$. Άρα $r\gamma'(0)\in T_G$.

Παρατήρηση

$T_G \leq M_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \dim(T_G)\leq n^2$.

Ορισμός

Η διάσταση μιας ομάδας $G\leq GL_n(\mathbb{K})$ ισούται με την διάσταση του εφαπτόμενου χώρου $\dim T_G$ στο I.

$$\boxed{\dim G=\dim T_G}$$

Παράδειγμα (Συνέχεια)

$U(1)=\{z\in\mathbb{C} \text{ με } z\bar{z}=1\}$.

Έστω γ διαφορίσιμη καμπύλη $(-c,c)\to U(1)$ με $\gamma(0)=I=1$

$\gamma(t)=a(t)+ib(t)$.

$T_{U(1)}=\{\gamma'(0) \mid \gamma \text{ διαφ. καμπύλη με } \gamma(0)=1\}$.

$\gamma'(t) = a'(t) + ib'(t)$ και $\gamma(t) \in U(1)$. Άρα $a^2(t) + b^2(t) = 1$

$-1 \leq a(t) \leq 1$ $\quad a(0) = 1$ μέγιστο. $\quad a : (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{\text{διαφ.}} \mathbb{R}$.

Επομένως, $a'(0) = 0$ γιατί στο 0 έχω μέγιστο.

$\gamma'(0) = a'(0) + ib'(0) = ib'(0)$, $\quad b'(0) \in \mathbb{R}$

Άρα $T_{U(1)} = \{ ib'(0) \mid b'(0) \in \mathbb{R} \} \overset{1}{\cong} \mathbb{R} \Rightarrow \dim U(1) = \dim T_{U(1)} = 1$

3.2.2 Ασκήσεις

1) Έστω A ένα στοιχείο της $O(n)$ με $detA = -1$. Δείξτε ότι

$$O(n) - SO(n) = \{BA|B \in SO(n)\}.$$

2) Έστω $A \in U(n)$ και $z \in \mathbb{C}$ με μήκος ένα. Δείξτε ότι $zA \in U(n)$.

3) Ένας πίνακας $A \in M_n\,()$ καλείται **ιδιοδύναμος** αν $A^2 = A$. Δείξτε ότι η εικόνα του $\mathbb{R}^n$ μέσω του A είναι ακριβώς τα σταθερά του σημεία.

4) Ένας πίνακας $A = (a_{i,j})$ καλείται **μηδενοδύναμος** αν $A^k = \mathbf{O}$ για κάποιον φυσικό k. Δείξτε ότι αν $a_{i,j} = 0$ για $i \geq j$, τότε ο A είναι μηδενοδύναμος.

5) Έστω U το σύνολο όλων των πινάκων $A = (a_{i,j})$ με $a_{i,j} = 0$ για $i > j$ και $a_{i,i} = 1$. Δείξτε ότι το U είναι ομάδα.